Table of content

Abstract isomorphisms of isotropic root graded groups over rings.

Pavel Gvozdevsky

In the recent preprint by author it was proved that under certain conditions, an abstract isomorphism between the groups of points of isotropic absolutely simple adjoint group schemes over rings must arise from a group-scheme isomorphism.

In this talk we give the precise statement of the theorem, give examples of groups that satisfy the assumptions, and discuss some application of this result for the model theory of algebraic groups.

Pavel Gvozdevsky
Department of Mathematics
Bar-Ilan University
Ramat Gan, Israel
e-mail: gvozdevskiy96@gmail.com

Problems in model theory of algebraic groups

Alexei Miasnikov

The talk is focused on model theoretic questions of simple/reductive algebraic groups over arbitrary rings with emphasis on their elementary equivalence. We plan to survey the developments of the theory starting with last decade results on classical groups. The very recent results for the isotropic case obtained by P. Gvozdevsky and E.Voronetzky will be outlined. If time permits, I will address the issue of anisotropic groups, which is a hard and tempting goal for further research

Alexei Miasnikov
(Stevens Institute of Technology),
Hoboken, NJ, 07030, USA
e-mail: amiasnikov@gmail.com

Н.А. Вавилов: историко-философский портрет

С.Ю. Пилюгин

Введение

Николай Александрович Вавилов (1952 – 2023) ушел от нас 14 сентября 2023 года.

Его выдающийся вклад в современную алгебру отражен в обзорных статьях [1–3].

В этих же статьях довольно много говорится о том, что он сделал в истории и философии математики, но это проходит как "побочная" тема, в то время как, по моему мнению, его работы в этой области представляют собой уникальное явление во всей современной культуре (а не только в той ее части, которая относится к математике) и заслуживают отдельного и более подробного разбора (хотя, конечно, предлагаемый текст будет неизбежно пересекаться с упомянутыми выше статьями). Совершенно не случайно, говоря об этих работах Н.А., приходится вспоминать огромное количество имен философов, писателей, художников, музыкантов. Эти имена (назову только Конфуция и И. Канта, Блаженного Августина и Леонардо да Винчи, О. Шпенглера, братьев Гримм, О. Уайльда, Л. Кэрролла и Л. Борхеса, композиторов И.-С. Баха, Г.Ф. Генделя, Д.Д. Скарлатти, Л. Джустини, Ж.-Ф. Рамо и путешественника Марко Поло, классиков живописи Я. ван Эйка, Р. ван дер Вейдена. Х. Мемлинга, а также современного парадоксального художника Васю Ложкина) естественно вплетаются в тексты Н.А. – это просто отражение его восприятия мировой культуры как единого целого.

При написании этого текста у меня были две цели – одна (частная) – выразить свое давнее восхищение личностью и творчеством Н.А. Вавилова, а вторая – убедить как можно больше математиков-профессионалов в том, что, читая его статьи, они получат глубокое интеллектуальное наслаждение.

К сожалению, мне не удалось выдержать одинаковый уровень подробности в изложении статей Н.А. Там, где есть окончательный результат (как, например, в тернарной гипотезе Гольдбаха), я ограничиваюсь историей постановки задачи и ответом; в других случаях я более подробно освещаю ход исследований.

Перед тем как перейти к основному тексту, я позволю себе вернуться к аналогии, которую я упомянул, выступая на заседании Санкт-Петербургского математического общества 12 декабря 2023 г., посвященном памяти Н.А. Вавилова.

В мировом искусствоведении есть очень важная для понимания уникальности вклада А. Дюрера в изобразительное искусство концепция – в то время как в большинстве многофигурных гравюр того времени лица людей в толпе изображены достаточно условно (обозначены рот, нос и глаза), каждая даже самая маленькая человеческая фигура в гравюрах Дюрера несет отпечаток индивидуальности. Недаром Дюрера называли гением детали.

Вот такое же скрупулезное внимание к деталям (создающим, как мы знаем, реальную содержательность текста) характерно для статей Вавилова – отмечу здесь упоминаемое ниже его замечание о "чтении под увеличительным стеклом" переписки Л. Эйлера и Хр. Гольдбаха, а также его воспоминание о знакомстве с типографскими тонкостями результатов компьютерной печати: "Для меня открылся новый мир – до этого я никогда не задумывался о различии короткого тире, минуса и длинного тире или о различии французской и американской типографских точек".

Кроме разделов, в которых излагается содержание основных историко-философских статей Н.А. Вавилова, текст содержит раздел о главной, на мой взгляд, книге Н.А., а также два дополнительных раздела, посвященных стилю Н.А. и нескольким людям, сыгравшим определяющую роль в его жизни.

Историко-математические тексты

Я начну обзор историко-математических текстов Н.А. Вавилова с большого цикла его статей, объединенных общим заголовком "Компьютер как новая реальность математики". Эти статьи [4–9] были опубликованы в 2020 – 2022 гг. Статьи содержат огромную библиографию: 57, 259, 375, 370, 279, 427 ссылок соответственно.

Сам автор несколько ограничивает значение этих текстов (или, по крайней мере, их части), говоря, что они имеют не научный и не исторический, а именно методический и методологический характер [5, с. 8]. На самом деле, статьи [4–9] – очень серьезное и детальное историческое исследование некоторых классических задач теории чисел, написанное первоклассным математиком.

Как это характерно для Н.А., тексты не только излагают историю, но и содержат глубокие философские рассуждения (см., например, начало следующего раздела).

О том, с каким энтузиазмом Н.А. подходил к написанию этих текстов, на мой взгляд, красноречиво говорит вот этот фрагмент из его письма, посланного мне 13.02.2022 (речь идет о статье [9]):

"Математика там простая – БУКВАЛЬНО школьная алгебра (ясно, что и геометрию и анализ я оставляю за горизонтом), но зато два ФЕЕРИЧЕСКИХ исторических сюжета".

Компьютер как новая реальность математики. I. Personal account

Эта статья – очень персонализированное изложение того, как компьютеры естественно "врастали" в жизнь математика-профессионала начиная со 2-й половины XX века и, по существу, произвели революцию в методах и результатах современной нам математики.

Н.А. начинает текст с известной (впрочем, не всеми, в том числе и самим Н.А., полностью разделяемой) формулироки Д. Цейльбергера 1993 года: "The computer has already started doing in mathematics what the telescope and microscope did to astronomy and biology". (Не следует удивляться цитатам на английском, немецком, французском, итальянском языках, приводимым без перевода, – Н.А., знавший более 10 языков и говоривший по крайней мере на 6 из них, естественно ориентировался на достаточно грамотного читателя).

После этого Н.А. формулирует свое (и очень содержательное с точки зрения философии науки) мнение о производимой компьютером "революции": "Подлинный масштаб *произошедших* изменений – и, тем более, того, что неминуемо произойдет в ближайшее время, с трудом осознается современниками. Независимо от всяких компьютерных доказательств появление компьютеров уже изменило нашу жизнь как математиков и наше восприятие математики. Это касается самых базовых представлений, гораздо более глубоких и важных, чем любые теории: контакт с математической реальностью, роль эксперимента, баланс идей и вычислений, соотношение большого и маленького – и проблема *промежуточных* размеров, о которой мы ранее не задумывались, – конечного и бесконечного, случайного и детерминированного, доказуемого и недоказуемого, вычислимого и невычислимого, возможного и невозможного ... И, что самое главное, интересного и неинтересного, куда вообще мы смотрим, и на что мы при этом обращаем внимание".

(Я долго думал о том, стоит ли включать в текст такие длинные цитаты. Но потом понял, что, помимо точной передачи мыслей Н.А., именно они смогут донести до читателя подлинный "аромат" его текстов. – С.П.)

Авторское отступление

22 марта 2025 г. на заседании Санкт-Петербургского математического общества С.И. Николенко (один из многочисленных соавторов Н.А.)

выступил с докладом "AI и математика: что модели могут сейчас и куда мы идем". Он рассказал о совершенно лавинообразном процессе использования AI для решения чисто математических задач. (Замечание от 23.07.2025: впервые в истории две модели искусственного интеллекта от Google и OpenAI "участвовали" в Международной математической олимпиаде и "набрали" достаточное количество баллов для получения золотых медалей).

Доклад Николенко вызвал большой интерес; думаю, что Н.А. был бы одним из самых заинтересованных слушателй.

Н.А. начинает историю своего опыта работы с компьютерами со школьных лет (он учился в 9 и 10 классах в знаменитой школе номер 30 на Васильевском Острове Санкт-Петербурга), и тогда этот опыт был исключительно негативным. Там стоял теплый ламповый Урал-1, который занимал целую комнату, а кодировать нужно было просто в адресах.

(Замечание от автора для развлечения нынешних продвинутых студентов: на наружной стенке Урала был "счетчик циклов", и по движению огонька по его лампочкам можно было следить, какой шаг запрограммированного цикла сейчас выполняется).

Не более позитивным был его опыт практического программирования на мат-мехе Университета (хотя там ламповый Урал сменила транзисторная БЭСМ-3). Н.А. даже чуть не был отчислен с мат-меха за незачет по программированию. Но потом, уже после окончания Университета, пошли заграничные поездки и первые знакомства с персональными компьютерами и LaTeX'ом.

Обучение шло быстро, и уже через несколько лет Н.А. читал такие курсы как "Прикладные математические пакеты", "Математика и компьютер", "Алгоритмы и структуры данных", "Криптография".

Н.А очень детально описывает, как ему удалось использовать возможности компьютера при решении чисто внутриматематических задач. Характерная цитата: "С тех пор (имеются в виду 1991/92 годы – С.П.) я не умножал сам руками матрицы 3×3, хотя в принципе умею это делать. И сейчас, пока я это пишу, тихо жужжит Mathematica 11.3, хотя, вероятно, уже давно пора апгрейдить ее до следующей".

В конце статьи идут очень содержательные и глубокие комментарии, объединенные заголовком "Новая реальность" и посвященные темам, в основном упомянутым в длинной цитате, приведенной в начале этого раздела: Контакт с реальностью, Соотношение идей и вычислений, Конечное и бесконечное, Возможное и невозможное, Проблема промежуточных размеров, Детерминированное и случайное, Выводимое и наблюдаемое, Алгоритмичесое мышление, Связь времен, Теоретическая и экспериментальная математика.

Отмечу, что, следуя девизу "Учиться и учить", в 2004 г. Н.А. начал читать на экономическом факультете СПбГУ курс "Математика и компьютер", в который были введены элементы теории чисел. Материалы этого курса отражены в очень интересной книге [10].

Следующие статьи цикла повящены истории нескольких классических задач.

Компьютер как новая реальность математики. II. Проблема Варинга

Чтобы ярко охарактеризовать стиль Н.А. в исторических статьях цикла (о стиле я еще подробно поговорю позже), просто перечислю имена математиков, упоминаемых в первых абзацах текста: Л. Эйлер, В. Боро (о котором Н.А. пишет обычным для себя образом: "Все мы, конечно, читали статью Вальтера Боро о дружественных числах"), Л. Диксон, В. Наркевич, Г.Х. Харди и Е.М. Райт, Хуа Локен, Дж.И. Литтлвуд, Р. Вон, И.М. Виноградов, А.А. Карацуба, У. Эллисон, К. Кавада, Р. Баласубраманиан, Т. Вули.

Не говоря вначале о самой проблеме Варинга, Н.А. сразу вступает в дискуссию о значимости (аддитивной) теории чисел для математики в целом и для ее преподавания. Конечно, он не может пройти мимо известного и часто цитируемого высказывания Л.Д. Ландау (поддержанного В.И. Арнольдом): "Простые числа не нужно складывать, простые числа нужно умножать" (восходящего по существу к фразе Харди "It is natural to multiply primes and unnatural to add them"). Не соглашаясь с такими авторитетами, Н.А. очень обстоятельно аргументирует свою точку зрения.

Приведу (не разворачивая их подробно) его основные доводы, с которыми трудно не согласиться:

• материал, которым оперирует теория чисел, хорошо известен и интересен сам по себе и апеллирует к естественному любопытству и любознательности;

• теория чисел имеет огромное *историческое* измерение;

• на элементарном уровне можно *сформулировать* как многие содержательные и важные результаты, так и многие классические проблемы теории, как решенные, так и открытые;

• теория чисел естественным образом связана со многими областями математики: алгеброй, геометрией, анализом (вещественным, комплексным, гармоническим ...), комбинаторикой, теорией вероятностей, теоретическими компьютерными науками и т.д.;

• теория чисел, вопреки известному мнению Харди, стала сегодня одной из важнейших областей математики именно с точки зрения *реальных* приложений.

Еще одним (и. конечно, очень весомым) аргументом в этой дискуссии является переведенный самим Н.А. отрывок из посмертной заметки великого Эйлера "De numeris amicabilibus".

Имея в виду педагогическую компоненту своего цикла статей, Н.А. начинает с простейшей и известной с древности задачи о представлении чисел суммой двух квадратов (вопрос, восходящий к "Арифметике" Диофанта, который был поставлен П. Ферма и решен Эйлером). Соответсвующую теорему обычно называют теоремой Ферма. Н.А. приводит ее доказательство, данное Д.Б. Цагиром (и, как он считает, доступное для ученика 5-6 класса).

Обсуждается также теорема Лежандра о числах, представимых в виде сумм трех квадратов (и Н.А. здесь же упоминает замечание Б.А. Венкова о том, что из теоремы Лежандра можно вывести более общую теорему Гаусса о количестве таких представлений в терминах числа классов бинарных квадратичных форм).

В упомянутой "Арифметике" Диофанта высказано предположение о том, что каждое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел (в 1770 г. это утверждение доказал Ж.Л. Лагранж). Н.А. приводит красивое тождество Эйлера, которое позволяет сводить теорему Лагранжа к соответствующему утверждению о представимости простых чисел.

Перейду к проблеме Варинга, которая обобщает теорему Лагранжа. Перефразируя оригинальный текст самого Э. Варинга (который, конечно, цитируется, при этом обсуждаются варианты формулировки в разных изданиях книги Варинга), Н.А. приводит такую ее формулировку: речь идет о поиске неотрицательных целых $x_1, \ldots, x_s$, удовлетворяющих уравнению

$$x_1^k + \cdots + x_s^k = n. \tag{1}$$

При фиксированном k наименьшее из чисел s, для которого уравнение (1) разрешимо при любом натуральном n, принято обозначать символом $g(k)$.

Н.А. детально обсуждает формулировки проблемы Варинга у различных авторов, отмечая несоответствия с оригинальной формулировкой и заканчивая очень характерной для себя фразой: "Не верьте никому на слово, а проверяйте все ссылки, чтобы знать, что у классиков на самом деле написано, и понимать, что они при этом имели в виду".

Ясно, что $g(1) = 1$, равенство $g(2) = 4$ следует из теоремы Лагранжа, сам Варинг утверждал, что $g(3) = 9$ и $g(4) = 19$, а И.А. Эйлер в 1772 г. заметил, что $g(5) \leq 37$, $g(6) \leq 73$, $g(7) \leq 143$, $g(8) \leq 279$, и сформулировал гипотетическую общую формулу для числа $g(k)$

Довольно много усилий различных людей было приложено для экспериментальной проверки гипотезы Варинга (ее инициировал К.Г.Я. Якоби); Н.А. называет А.Р. Цорнова, Захариаса Дазе, Роберта Даублебски фон Штернека, Бретшнайдера, Альфреда Вестерна и других.

Первое общее доказательство конечности $g(k)$ для какого-либо k дал Ж. Лиувилль; он доказал, что $g(4) \leq 53$; Н.А. приводит его красивое и элементарное доказательство.

Дальше теорию развивали инженер Эдмон Майе, врач Альберт Флек, школьный учитель А. Виферих, а также многие профессиональные математики, такие как А. Гурвиц, И. Шур и другие.

Наконец, в 1909 г. Д. Гильберт получил принципиальное решение проблемы Варинга, показав, что для любого натурального числа k найдется такое $g(k)$, что любое натуральное число n представимо в виде суммы $g(k)$ неотрицательных k-х степеней. Доказательство Гильберта было чистой теоремой существования – нужные тождества не предъявлялись в явном виде; их существование вытекало из довольно сложных геометрических соображений. Это доказательство модифицировали Ф. Хаусдорф, Э. Стридсберг, Р. Ремак, А. Гурвиц, Г. Фробениус, Э. Шмидт и многие другие.

Доказательство Гильберта не давало никаких конкретных оценок чисел $g(k)$; первая эффективизация этого доказательства была получена только в 1953 г. Г. Й. Ригером (но с невероятно завышенными оценками).

В 1920-1925 гг. Харди и Литтлвуд предложили принципиально новый подход к гипотезе Варинга. Они обозначили через $G(k)$ такое наименьшее число s, что любое *достаточно большое* число n представимо в виде суммы s неотрицательных k-х степеней (такой подход восходит к Якоби). Ясно, что $G(k) \leq g(k)$. С другой стороны, конечность $G(k)$ влечет конечность $g(k)$.

Харди и Литтлвуд первоначально дали экспоненциальную по k оценку $G(k)$ с главным членом $(k-2)2^{k-2}$; в 1934-1935 гг. И.М. Виноградов улучшил ее до полиномиальной по k оценки, вначале примерно квадратичной, но почти сразу до примерно линейной для больших k.

(Н.А. подробно обсуждает еще много деталей изучения гипотезы Варинга, но я не буду утомлять ими читателя; мне кажется, что основное сказано. – С.П.)

Перейду, наконец, к финалу истории. Вот как он звучит у Н.А.: "Сформулируем, прежде всего, ответ. На 99,9999% мы уверены, что это в точности тот ответ, который предсказал Эйлер-младший в XVIII веке, то, что называется **идеальная теорема Варинга**. А именно, пусть $3^k = q \cdot 2^k + r$, где $q + r \leq 2^k$. В 1935-1936 гг. Л.Ю. Диксон и С.С. Пиллай доказали, что в этом случае, если $k \geq 7$, то $g(k) = 2^k + q - 2$".

Отступление о стиле. В разделе "Стиль" я приведу очень характерное для текстов Н.А. высказывание о Диксоне.

Два оставшихся маленьких случая, не охваченные первоначальным результатом Диксона – Пиллая, были полностью рассмотрены, один вскоре, а другой потребовал еще четверть века ($g(6) = 73$, Пиллай, 1940 г., и $g(5) = 37$, Джинжун Чэнь, 1964 г.).

Что касается условия $q + r \leq 2^k$, предполагается (гипотеза Пиллая), что оно выполнено всегда, но это так и не доказано.

Оставшаяся часть статьи содержит огромную (и не воспроизводящуюся здесь) информацию о задачах, близких к гипотезе Варинга (и, в частности, о результатах, полученных с помощью компьютеров).

Очень характерно для Н.А. начало заключительного раздела статьи (ярко названного I shan't call it the end). Приведу его:

"Кто решил проблему (вариант, доказал гипотезу) Варинга? Решена ли она вообще? Я не знаю. И сейчас, прочитав несколько сотен текстов на эту тему, знаю еще гораздо меньше, чем раньше. Полвека назад, как школьник старших классов или студент младших курсов, я бы уверенно ответил, что Гильберт в 1909 году.

Сегодня я не только знаю, что это не так, но и перестал понимать сам вопрос. *Настоящую* задачу, вот такую, как проблема Варинга, нельзя раз и навсегда *решить*. Здесь особенно отчетливо видно, как трудно дается каждое *реальное* продвижение, и можно непосредственно сравнить результаты усилий разных поколений. Такую задачу можно только постоянно *решать*, возвращаясь к ней снова и снова, чтобы заново осознать ее формулировку и *попытаться* применить те инструменты, которыми мы располагаем в данный момент".

Компьютер как новая реальность математики. III. Числа Мерсенна и суммы делителей

Эта статья посвящена двум классическим темам:

• проверка простоты и факторизация больших чисел, а именно чисел Мерсенна $M_p = 2^p - 1$, где p – простое;

• задачи о сумме делителей: известные с глубокой древности задачи о совершенных и дружественных числах, их обобщения и варианты.

Самоцитата Н.А.: "Как и в исследованиях по проблеме Варинга, в этих темах «особенно отчетливо видно, как трудно дается каждое *реальное* продвижение, и можно непосредственно сравнить результаты усилий разных поколений»".

Яркой иллюстрацией поразительного прогресса в этих задачах являются два приводимых Н.А. факта:

• За примерно 2500 лет было открыто вручную 12 простых Мерсенна, из них последнее в 1914 году, в самом большом из них 39 десятичных цифр. В 1952-2018 годах с помощью компьютера было открыто еще 39 простых Мерсенна, в самом большом из них, известных сегодня, 24862048 цифр. Почти все самые большие известные сегодня простые числа – все в первой десятке! – это либо числа Мерсенна, либо их старшие делители.

• За всю многотысячелетнюю историю задачи о дружественных парах (см. точное определение в конце этого раздела. – С.П.) по состоянию на 1971/72 годы было найдено всего 1108 таких пар, и все, кто их открыл, известны поименно. С тех пор с помощью компьютеров были открыты $> 1.2 \cdot 10^9$ таких пар (Замечание Н.А.: "Я сознательно не указываю точное значение: сегодня открывают *сотни тысяч* таких пар *каждый день*, так что точное количество известных пар наверняка изменится за редакционный период подготовки настоящей статьи").

То, что первые числа Мерсенна простые, было известно с древних времен ($M_2 = 3, M_3 = 7, M_5 = 31, M_7 = 127, \dots$); это сформировало гипотезу о том, что все числа Мерсенна простые, опровергнутую Х. Региусом в 1536 г. (он заметил, что $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$).

Н.А. очень детально анализирует (выписывая длинные латинские цитаты) книги Мерсенна 1644 и 1647 годов, посвященные числам его имени.

В развитие теории большой вклад внесли не только математики-профессионалы, но и любители. Отмечается, например, результат русского сельского священника Ивана Михеевича Первушина, который в 1883 г. открыл число M_{61}.

И здесь не удержусь от характерной для Н.А. цитаты: "Иван Первушин был старшим из 17 детей в семье, что с детства вызвало у него интерес к простым числам. Впрочем, Википедия утверждает, что в семье его родителей было всего 16 детей, что, конечно, объясняло бы его интерес к степеням двойки".

Последним из чисел Мерсенна, найденным вручную, было M_{107} (это сделал Р.Э. Пауэрс, тоже любитель, в 1914 г., используя арифмометр).

Следующие два простых числа, M_{521} и M_{607}, были найдены уже с использованием компьютера (и это произошло ровно за день до смерти Пауэрса).

После этого "компьютерные открытия" продолжались, причем работа с числами Мерсенна стала одной из задач, на которых испытывались как новые компьютеры, так и новые алгоритмы (например, алгоритмы быстрого умножения многозначных чисел).

Наконец, в январе 1996 г. Дж. Вольтман организовал проект распределенных вычислений GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), в котором участвуют 250000 человек и более 2,5 миллионов компьютеров. Кроме самых быстрых на сегодня алгоритмов умножения больших чисел и критерия Люка – Лемера, используются пробное деление, тесты псевдопростоты, алгоритм Ленстры, алгоритм Полларда и многое другое.

Все последние новые простые числа Мерсенна найдены именно в рамках этого проекта. Для иллюстрации их величины Н.А. приводит яркое сравнение. Если считать, что стандартная книжная страница содержит 2000 знаков, то для записи числа $M_{6,972,593}$ потребовалась бы книжка толщиной в 1000 страниц!

После этого Н.А. детально обсуждает факторизацию чисел Мерсенна, на чем я не останавливаюсь подробно.

Числа Мерсенна играют совершенно исключительную роль в одной из старейших нерешенных проблем математики, относящейся к четным совершенным числам. Напомним, что число называется совершенным, если оно равно сумме своих делителей. Первые такие числа (6=1+2+3, 28= 1+2+4+7+14, 496=1+2+4+6+16+32+62+124+248) были известны еще в VI веке до н.э. Н.А. приводит поразительное рассуждение из книги Блаженного Августина "De Civitate Dei": число 6 совершенное не потому, что Б-г создал Мир за 6 дней, а, наоборот, Б-г потому создал Мир за 6 дней, что число 6 – совершенное.

Имеет место следующая теорема Евклида – Эйлера: множество четных совершенных чисел совпадает с множеством чисел вида $2^{p-1}M_p$ где M_p – простое число Мерсенна.

Эта теорема сводит вопрос о бесконечности множества четных совершенных чисел к вопросу о бесконечности множества простых чисел Мерсенна.

Н.А. формулирует две классические проблемы, ответы на которые неизвестны.

Проблема: бесконечно ли множество четных совершенных чисел?

Проблема: существуют ли нечетные совершенные числа?

Упомяну еще о так называемых дружественных числах: два числа m и n называются дружественными, если сумма собственных делителей числа m равна n, а сумма собственных делителей числа n равна m.

Н.А.: "Известный болтун и фантазер Явмлих из Халкиса приписывает лично товарищу Пифагору с острова Самос открытие первой пары дружественных чисел

$$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \text{ и } 284 = 2^2 \cdot 71".$$

Еще два пришедших к нам из древности вопроса без известных ответов.

Проблема: бесконечно ли множество дружественных пар?

Проблема: существуют ли четно-нечетные дружественные пары?

Компьютер как новая реальность математики. IV. Проблема Гольдбаха.

На самом деле существует несколько вариантов проблемы Гольдбаха. Основное внимание в этой статье Н.А. уделяет так называемой тернарной=нечетной проблеме Гольдбаха – утверждению, что любое нечетное натуральное число $n > 5$ можно представить в виде суммы 3 натуральных простых.

Это одна из немногих классических задач теории чисел, которую удалось полностью решить (причем, как подчеркивает Н.А., не в асимптотических переформулировках XX века, а в *исходной* формулировке XVIII века!)

Это сделал Х. Хельфготт в 2013-2014 годах, и в его достижении огромную роль сыграло использование компьютера.

История появления этой проблемы такова. В маргиналии к адресованному Леонарду Эйлеру письму 1742 года, которое в 1843 г. опубликовал правнук Эйлера Павел Николаевич Фусс, Христиан Гольдбах высказал предположение, ставшее впоследствии знаменитым как **гипотеза Гольдбаха** (хотя, как отмечает Н.А., в 1908 г. стало известно, что часть этого утверждения, относящуюся к *нечетным* числам, сформулировал еще Р. Декарт ровно за век до Гольдбаха).

Соответствующая сформулированной выше нечетной проблеме Гольдбаха четная проблема звучит так: каждое четное натуральное число $n > 2$ можно представить в виде суммы 2 простых. Она к настоящему моменту открыта (даже в асимптотическом варианте, где речь идет не обо всех, а только о достаточно больших четных числах).

В начале текста статьи Н.А. приводит точную формулировку из письма Гольдбаха. Один из следующих абзацев назван жестко: "Верить в наше время нельзя никому". Вот как Н.А. его начинает: "В процессе подготовки настоящей статьи я посмотрел формулировки проблемы Гольдбаха в *нескольких десятках* математических и историко-математических текстов. *Ни в одном* из них приведенный выше фрагмент не воспроизводится полностью без грубых искажений".

Как отмечает Н.А., такое происходит даже в текстах Харди — Литтлвуда и Хуа Локена. Его комментарий: "Опять же, это *великие* классики! Можно представить себе, что творится в текстах, написанных просто классиками!"

И убийственная финальная фраза абзаца: "Должен признаться, что мысль о том, что история математики в изложении профессиональных математиков чуть более, чем вся, выглядит хуже, чем Wikipedia, была для меня совершенно новой".

Во введении я писал о "чтении под увеличительным стеклом" писем Эйлера и Гольдбаха. Вот точная цитата из одного из подстрочных примечаний Н.А.: "В книге Дирка Хоффманна ... воспроизведена в более крупном разрешении собственно *маргиналия* Гольдбаха, где хорошо видно, что слова «die grösser ist als 1» дописаны вообще без пробелов *под* строкой, потом 1 там заменена на 2, а потом снова на 1".

Говоря о переписке Эйлера и Гольдбаха, Н.А. делает очень ярко характеризующее его уровень знаний и очень глубокое замечание о языке их писем (которые он рекомендует читать полностью). Вот оно:

"Безумно интересен и сам язык этих писем, который представляет собой идиосинкратичекий немецко-латинский пиджин, где все значащие слова латинские, а служебные – немецкие: «ein aggregatum trium numerorum priorum sey». При этом поразительным образом этот несуществующий язык полностью, *до слова*, понятен – даже понятнее той латыни с немецкой грамматикой, на которой они писали свои статьи".

К сожалению, здесь совершенно невозможно воспроизвести полную историю решения нечетной проблемы Гольдбаха, которая у Н.А. занимает несколько десятков страниц; одно перечисление имен математиков, которые внесли в это решение вклад, потребовало бы, думаю, несколько страниц.

Н.А. заканчивает эту статью упоминанием еще нескольких аддитивных задач. Отмечу, например, **гипотезу Харди – Литтлвуда**: любое достаточно большое натуральное число, не являющееся квадратом, представимо в виде суммы простого и квадрата.

Компьютер как новая реальность математики. V. Легкая проблема Варинга

В отличие от классической проблемы Варинга, о которой шла речь выше, рассматривается проблема о нахождении для каждого натурального k такого числа $s = \nu(k)$, что все натуральные числа n могут быть представлены как суммы k-х степеней,

$$n = \pm x_1^k \pm \cdots \pm x_s^k, \qquad (2)$$

в количестве s штук *со знаками.*

В формулировке Н.А., "Эдвард Майтланд Райт *злополучно* окрестил ее легкой проблемой Варинга (**Easier Waring Problem**)". Ее принципиальное отличие от классической проблемы Варинга в том, что решения уравнения (1) должны удовлетворять оценке $|x_j| \leq n^{1/k}$, в то время как решения уравнения (2) могут превосходить n на много порядков. Это сразу делает неприменимыми большинство методов, разработанных для классической проблемы Варинга. Поэтому легкая проблема Варинга не решена ни для одного нетривиального случая (даже для $k = 3$), несмотря на сотни опубликованных работ.

Еще в 1953 г. Л.Дж. Морделл предложил найти дальнейшие решения уравнения

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3,$$

кроме очевидных

$$1^3 + 1^3 + 1^3 = 3 \text{ и } 4^3 + 4^3 - 5^3 = 3.$$

Предполагалось даже, что таких решений нет, но в 2019-2021 гг. оказалось, что таких решений много (но и сами они гораздо *больше*). Вот следующее (самое маленькое из них):

$$x = 569936821221962380720, y = 569936821113563493509,$$

$$z = 472715493453327032.$$

Для его поиска была создана сеть распределенных вычислений, состоящая из 400000-500000 компьютеров.

Обсуждаются несколько тесно связанных со сформулированной проблемой задач, например, **рациональная проблема Варинга** (в которой ищутся рациональные решения) и **проблема Варинга в нуле** (включающая в себя в качестве очень частного случая великую теорему Ферма).

С научной точки зрения, эти и близкие к ним задачи относятся к **арифметической геометрии**, или, еще точнее, к ее центральному разделу, **диофантовой геометрии**, которая изучает целые и рациональные точки на алгебраических многообразиях.

Статья заканчивается детальным методическим и методологическим обсуждением возможностей компьютерного поиска и эксперимента. Цель обсуждения троякая:

• напомнить несколько классических задач варинговского типа;

• привлечь внимание к широчайшим возможностям использования этого материала в преподавании;

• сформулировать варианты проблемы Варинга как вызов для полиномиальной компьютерной алгебры.

Н.А. напоминает, что большинство полученных за последний век явных вычислений и улучшение оценок в этих задачах обусловлены открытием все более изощренных полиномиальных тождеств.

Так же как и некоторые предыдущие статьи этого цикла, текст содержит как невероятное количество полиномиальных тождеств (с объяснением их применения в теории чисел), так и целую мозаику исторических сведений.

Думаю, что любящий историю читатель с огромным интересом прочитает включенный в текст раздел о так называемой афере Г. Либри и противостоянии Либри и Лиувилля.

Компьютер как новая реальность математики. VI. Числа Ферма и их родственники

В этой статье Н.А. продолжает обсуждать роль компьютеров в теории чисел, в первую очередь в факторизации больших чисел специального вида, на примере одной классической задачи.

Как известно, Ферма предположил, что при натуральных n числа вида

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

(названные его именем) простые. На самом деле, как комментирует Н.А., Ферма говорит, что он в этом **почти** убежден, но у него нет точного доказательства. Ферма упоминал о своем предположении в письмах многим математикам; в статье цитируются его письма Б. Френиклю, М. Мерсенну, Б. Паскалю, К. Дигби, П. Каркави (часть на французском, часть на латыни). В переписке Эйлера и Гольдбаха проблема простоты чисел Ферма непосредственно *обсуждается* в шести письмах и *упоминается* еще в нескольких.

Н.А. пишет: "`то, что гипотеза Ферма оказалась безнадежно неверна, не делает ее менее великой`. Ее роль в развитии теории чисел и алгебры в целом огромна.

Опровержение этой гипотезы, а именно доказательство непростоты числа F_5, составило содержание *первой* работы Леонарда Эйлера по теории чисел ... Построение правильного 17-угольника, также теснейшим образом связанное с числами Ферма, составило содержание *первой* работы Карла Фридриха Гаусса, после которой он окончательно решил посвятить себя математике".

В действительности в 1732 году Эйлер нашел разложение числа F_5:

$$F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417 = (5 \cdot 2^7 + 1)(52347 \cdot 2^7 + 1).$$

Говоря об этом результате Эйлера, Н.А. пишет: "зная Эйлера, мы можем предположить, что он, скорее всего, и здесь обошелся без явных вычислений ... Экстраполируя этот пример, мы видим, что один изобретательный математик может с успехом заменить *сотни* вычислителей – *два* изобретательных математика заменяют небольшой компьютер".

Статья в основном посвящена факторизациям чисел Ферма и фантастическим продвижениям в поиске их простых делителей, полученным в эпоху распределенных вычислений.

Кроме того, упоминаются несколько связанных с числами Ферма тем, в частности, следующие.

Обобщенные числа Ферма

$$F_n(a) = a^{2^n} + 1,$$

среди которых много простых и которые, судя по динамике последних лет, имеют все шансы заменить числа Мерсенна в качестве рекордных простых.

Числа Прота

$$k \cdot 2^m + 1, \quad k < 2^m,$$

которые возникают как делители чисел Ферма и также играют центральную роль в построении рекордных простых и цепочек простых с контролируемыми разностями.

Роль простых Ферма и **простых Пирпойнта**

$$2^r \cdot 3^s + 1$$

в циклотомии, т.е., в вычислении и фактическом геометрическом построении корней соответствующих степеней из 1 (в финальном разделе статьи очень детально обсуждаются построения правильных многоугольников с использованием циркуля и линейки, а также, например, параболического лекала).

К 300-летию Санкт-Петербургского университета журнал "Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия" опубликовал серию обзорных статей, посвященных самым ярким достижениям математиков Университета за время его существования. Предполагалось, что в эту серию войдут несколько статей по истории исследований в области алгебры, написанных Н.А. Вавиловым. К сожалению, были опубликованы только первые две из этих статей [11, 12]; остальные не были написаны. Об этой статьях я и поговорю (ограничившись короткими резюмирующии цитатами и перечнем разделов).

Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. I. Предыстория

Цитата из вводной части.

"Генетически алгебра в Петербурге возникла из теории чисел и довольно долго развивалась именно как *часть* теории чисел, *под огромным влиянием* теории чисел, или *для приложений* в теории чисел. Первыми собственно алгебраическими школами, возникшими в нашем городе, были школа Тартаковского (которая, к огромному сожалению, не продолжилась) и школа Фаддеева, от которой и произошла основная часть сегодняшней петербургской алгебры.

Тем не менее до второй половины 1970-х годов даже те из учеников Фаддеева, кто потом занимался чистой алгеброй, защищали докторские диссертации по тематике, связанной с теорией чисел (алгебраическая теория чисел, теория Галуа, локальные поля, арифметическая алгебраическая геометрия ...). В конечном счете даже исследования по гомологической алгебре и теории целочисленных представлений были изначально мотивированы именно приложениями в алгебраической теории чисел (обратная задача теории Галуа, задача погружения и т.д.)

Однако во второй половине 1970-х годов тематика школы *невероятно* расширилась, включив в себя новую на тот момент алгебраическую K-теорию, алгебраическую теорию квадратичных форм, теорию линейных групп – и вскоре теорию классических групп, теорию алгебраических групп – изначально групп Шевалле, потом и более общих классов редуктивных групп и групповых схем, причем как классических, так и в особенности *исключительных* – конечные группы, комбинаторную теорию групп, алгебры Ли, и в последние годы теорию мотивов, теорию неассоциативных алгебр, теорию однородных пространств и т.д. Вплоть до того, что сегодня именно эти направления воспринимаются как точка силы петербургской алгебраической школы, где она занимает лидирующие позиции в мире.

Огромную роль в этом переходе сыграли два человека – Зенон Иванович Боревич и Андрей Александрович Суслин. В настоящем обзоре мы обсуждаем ранние работы Андрея Суслина, посвященные классической K-теории, работы Зенона Ивановича Боревича, посвященные описанию подгрупп в классических группах над кольцами, направление в структурной теории, которое возникло в результате совмещения двух этих крупных продвижений, и дальнейшие продвижения в арифметической теории и геометрии алгебраических групп, теории конечных групп типа Ли, комбинаторной и асимптотической теории групп, которые явились следствием этого".

Перечислю разделы обзора.

1. Предыстория.
1.1. Углы Эйлера.
1.2. Решетка Коркина – Золотарева.
1.3. Федоровские группы.
2. Генезис Петербургской алгебраической школы.
2.1. Чебышев.
2.2. Коркин и Золотарев.
2.3. Граве.
2.4. Делоне.
2.5. Фаддеев.
2.6. Линия Маркова.
3. Школа Тартаковского.
3.1. Тартаковский.
3.2. Школа комбинаторной теории групп.
3.3. Санов.
3.4. Школы Линника и Андрианова.
4. Как все начиналось: Боревич.
5. Как все начиналось: Суслин.

Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. II. Ранние работы Суслина

Здесь я ограничусь воспроизведением абстракта:

"Настоящий обзор продолжает описание вклада петербургских математиков в теорию линейных, классических и алгебраических групп. Вторая часть посвящена работам Суслина 1970-х – начала 1980-х годов в области классической алгебраической K-теории и теории линейных и классических групп. Мы описываем общий контекст этих работ, формулируем некоторые наиболее важные результаты самого Суслина и его учеников, а также некоторые наиболее тесно связанные с ними последующие результаты".

История развития вычислительной теории групп

В этой связи следует вспомнить еще одну короткую статью Н.А [13], написанную к 70-летию А.И. Скопина и посвященную в основном истории развития в Ленинграде – Санкт-Петербурге важного и интересного направления компьютерной алгебры – вычислительной теории групп.

Конкретная теория групп

В таком тексте, как этот, невозможно не упомянуть книгу Н.А. [14], хотя формально она не является ни исторической, ни философской. Предисловие к этой книге было первым образцом творчества Н.А., который попал мне в руки. Впечатление было потрясающим; после этого я совсем другими глазами смотрел на давно знакомого мне Колю Вавилова, с которым мы в то время преподавали на мат-мехе Университета.

Я отчетливо представляю то потенциальное удовольствие, которое получит любопытный читатель этой книги. Начну с (неполного, конечно) списка эпиграфов: здесь И. Стравинский, Р. Фейнман, П. Тейар де Шарден, Г. Селье, И. Бродский, В. Ерофеев, Чжуан-цзы, Ж. де Местр, O. Wilde, М. Булгаков, Дайсэцу Судзуки, Л. Виттгенштейн, J. Newman, A. Speiser, Д. Хармс, Идрис Шах, Groucho Marx, А. Перес-Реверте, А.И. Мальцев ...

Лучше всего стиль книги охарактеризуют несколько цитат.

"Самыми важными сторонами математики являются ее очарование и *увлекательность*. ... Тот текст, который Вы видите перед собой, представляет собой фрагмент систематического учебника алгебры для начинающих. В отличие от френологических учебников, он *обращен* не к логической шишке где-то в левом полушарии, а к *сознанию, подсознанию и гиперсознанию ученика в их целостности*. Этот текст скомпонирован по тем же законам, что *Гептамерон, Гаргантюа и Пантагрюэль, Тристам Шенди, Жак-фаталист, Кот Мурр, Винни-Пух, Властелин колец, Звездные войны, Индиана Джонс*, и его следует оценивать по тем же критериям".

"Важность понятия группы для математики в целом сопоставима тоько с важностью таких понятий как категория, множество, отображение, кольцо, модуль, топологическое пространство, многообразие, мера ... Официально теория групп возникла в начале XIX века из трех основных источников: **теория чисел, теория алгебраических уравнений и геометрия**. Сам термин группа впервые ввел в 1830 году Эварист Галуа. Этот термин происходит от «grouper les permutations» – «группировать перестановки»".

Сноска:

"Задолго до того, как люди начали заниматься перестановками, они конструировали математические фигуры, которые теснейшим образом связаны с теорией групп и которые можно выразить только в теоретико-групповых терминах, а именно, регулярные орнаменты, которые переводятся в себя движениями и отражениями. В частности, Египетская математика, которой столь восхищались Греки, несомненно состояла в поиске именно таких фигур. Египетская Орнаментика пережила новый мощный взлет в Арабском и Персидском искусстве, где она создала образцы *неслыханного* совершенства и математической глубины. В готической архитектуре встречаются даже сложные пространственные группы".

Продолжу цитату:

"В качестве типично Шпенглеровского совпадения отметим, что в том же самом 1830 году, когда Галуа употребил термин «группа», Гессель осуществил вывод 32 кристаллографических классов.

Однако я склонен верить, что в действительности понятие группы является **древнейшим** математическим понятием, более древним, чем понятие числа, и неотделимым от самой человеческой цивилизации. Группы появляются **всюду**, где возникают симметрии, автоморфизмы, обратимые преобразования. Иными словами, всюду, где есть повторяющиеся и самовоспроизводящиеся узоры (patterns). А человеческая культура, подобно природе и жизни, состоит в составлении узоров. Именно на этом основана вездесущность идеи группы, универсальность этого понятия и огромное разнообразие его приложений в самой математике, а также в искусстве, физике, химии, кристаллографии, теории передачи информации, криптографии ..."

И еще:

"Математика, как говорит ее название, является доктриной и корпусом знаний (body of knowledge) – но вовсе не владение доктриной и корпусом знаний делает человека математиком. Нельзя знать математику, но можно быть математиком. Быть математиком означает, в первую очередь, видеть, обладать сверхзрением, позволяющим смотреть сквозь стены и поверх барьеров".

Мне кажется, если даже последняя фраза относится не ко всем математикам, то уж она точно описывает математика Н.А. Вавилова!

Цитата:

"Самым важным из того, что произошло до сих пор в конечной математике, является классификация конечных простых групп. Она открывает возможность к получению доказательств результатов о конечных объектах, основанных на переборе случаев (case by case analysis) ... Симметрии платоновых тел гипнотизируют математиков на протяжении 25 веков. Можно думать, что и симметрия конечных простых групп и извлечение ее непосредственных следствий будет одной из важнейших задач математики на несколько столетий".

(Помню, что это утверждение я слышал от Н.А. неоднократно, и каждый раз меня впечатляла та глубокая внутренняя убежденность, с которой это говорилось. – С.П.)

И заключительная цитата:

"Как учат великие мудрецы древности, передача (математических) знаний возможна только от сердца к сердцу (син-син-мей), слова здесь играют чисто служебную роль. Студент должен слышать то, что я думаю, а не то, что я говорю. При этом он либо понимает то, что я *хочу* сказать, либо не понимает. Это не зависит ни от того, что говорится, ни от того, как это говорится, а **только** от наличия или отсутствия ментального контакта, синхронизации наших сознаний, подсознаний и гиперсознаний".

Философия доказательства

Очень важной частью философского наследия Н.А. является его программная статья, содержащая совершенно нетривиальный анализ соотношения логики и интуиции в процессе развития математики.

Reshaping the metaphor of proof [15]

Вначале Н.А. формулирует несколько (считающихся общепринятыми) тезисов о структуре математического доказательства; я привожу, значительно упрощая, лишь некоторые из них:

• доказательство – это формальный текст, в котором по строго определенным правилам результат выводится из набора аксиом и ранее полученных результатов;

• иногда очень трудно предъявить доказательство, но его проверка – это чисто технический процесс (в частности, доступный компьютеру);

• существуют общепринятые во всех областях математики критерии строгости доказательства;

• все утверждения, формулируемые в учебных курсах достаточно продвинутого уровня, приводятся с полными и четкими доказательствами.

Приводя весьма убедительные примеры и аргументы, Н.А. опровергает основную часть сформулированных выше тезисов.

Список приводимых им примеров неверных (или неполных) доказательств впечатляет: начиная от некоторых теорем Евклида (которые неявно используют недоказанные геометрические утверждения), продолжая историей доказательств основной теоремы алгебры и великой теоремы Ферма, а также теоремы Дюлака о конечности числа предельных циклов у полиномиальной автономной системы дифференциальных уравнений на плоскости и теоремы Племеля, посвященной проблеме Римана – Гильберта (в двух последних случаях мировое математическое сообщество десятилетиями не замечало ошибочности опубликованных доказательств).

Согласно концепции Н.А., доказательство более или менее содержательного математического утверждения – это не формальный вывод результата из аксиом и предшествующих теорем, а скорее "дорожная карта", пользуясь которой (и прикладывая при этом иногда не менее усилий, чем приложил автор доказательства для его создания), математик-профессионал может убедиться в верности доказываемого результата.

При этом огромную роль играют как подготовка "воспринимающего" доказательство, так и уровень его интуиции. Н.А. цитирует по этому поводу своего старого друга Олега Ижболдина, который говорил: "Кто доказал, что и кому?" Это переформулируется замечательной фразой: "Воеводский доказал Суслину гипотезу Милнора".

Не могу не упомянуть одну из последних статей Н.А. [16]. Формально говоря, так же как книга [14], эта статья (посвященная преподаванию математики для нематематиков и написанная с присущими Н.А. резкостью и остротой) не является ни исторической, ни философской, но, как увидит читатель из приводимой ниже цитаты, она содержит глубокие философские мысли о том, что являктся принципиально важным при обучении математике как профессионалов, так и непрофессионалов.

Небеса падают: математика для нематематиков

Абстракт: "Математическое образование, как массовое образование, так и преподавание математики нематематикам на университетском уровне, находятся в ужасающем состоянии и быстро деградируют. Мы убеждены, что преподавание математики нематематикам должно быть полностью реформировано как в том, что касается его содержания, так и, в особенности, стиля. С традиционными подходами такой переход займет десятилетия, с непредсказуемыми результатами. Этого времени у нас нет. Появление систем Компьютерной Алгебры дает математическому сообществу шанс на изменение этой ситуации. В настоящей статье мы описываем один проект такого рода реформы, осуществленный в Санкт-Петербургском государственном университете".

И обещанная цитата: "С нашей точки зрения, самый важный аспект в преподавании математики на элементарном уровне – это выработка и культивация **интеллектуальной честности**. Иными словами, способности отличать то, что мы понимаем, от того, что мы не понимаем. То, что было определено и имеет точный смысл, от того, что его не имеет. То, что именно говорится, от того, что имеется в виду. Правдоподобное от невероятного, истинное от ложного, доказанное от предполагаемого и т.д."

Стиль.

Великий Жорж-Луи Леклерк де Бюффон в своей инагурационной речи во Французской Академии произнес фразу, вошедшую в историю: "Le style c'est l'homme" (обычно ее переводят на русский словами "Стиль – это человек"). Думаю, что уникальный стиль Н.А. в его текстах – это отражение уникального стиля его мышления, в котором неразделимо переплетались математика, литература, живопись, музыка, история, воспоминания о людях и о самых диковинных странах.

Как было обещано в разделе, посвященном проблеме Варинга, процитирую высказывание Н.А. о Диксоне. Вот что он пишет:

"У Оскара Уайльда есть прекрасный образ, почему боги скрыты друг от друга и могут видеть только своих адептов. Пока энергия творения безрассудно влечет их к цели, колеса их колесниц поднимают облака пыли. В результате они оказываются неспособны судить не только о работе других, но и своей собственной. Во всех 30++ работах Диксона по проблеме Варинга Гильберт в связи с ней не упоминается ни разу".

Чтобы хоть как-то компенсировать отсутствие в разделе, посвященном проблеме Гольдбаха, изложения долгого пути ее доказательства и еще раз порадоваться стилю (как мышления, так и восприятия жизни) Н.А., приведу еще одну цитату.

"As a side note, раз уж это personal account, в 2016 году Universidad Nacional de Córdoba – той Кордовы, которая в Аргентине, а не той, которая в Андалусии, – присудил Харальду Хельфготту степень доктора Honoris Causa. Я как раз оказался там по приглашению моего друга Николаса Андрюшкевича и присутствовал при награждении. Поскольку до этого я много общался с Харальдом, когда он занимал у нас кафедру Ламе и уже слышал два его доклада с доказательством (летом 2014 года в Сеуле и потом осенью 2014 года в Петербурге), то мог следить за математикой вполуха и сосредоточиться на форме – доклад, естественно, был на испанском. Никогда ни до этого, ни после я не слышал столь нормативной и рафинированной испанской речи, напомнившей мне по стилю тексты Борхеса. Как говорит по этому поводу классическая индийская пословица, «Шиву в мешке не утаишь»".

Говоря о гипотезе Ферма, Н.А. упоминает числа Кармайкла, т.е., такие составные числа n, что

$$a^n \equiv a \pmod n$$

для всех a.

Цитата: "Кстати, весьма символично, что 1729 – номер года, когда Гольдбах привлек внимание Эйлера к задаче Ферма, – тоже число Кармайкла, $7 \cdot 13 \cdot 19$". И совершенно очаровательная сноска к этой фразе:

"Такого рода совпадения безумно любил Освальд Шпенглер. Он построил целую теорию на основе того, что три величайших европейских – "фаустовских" – композитора, Иоганн Себастьян Бах, Георг Фридрих Гендель и Доменико Скарлатти, родились в один год, 1685. Не помню, кстати, упоминает ли он в этой связи Лодовико Джустини? Для полной симметрии следовало. Жан-Филипп Рамо со своим 1683 годом, конечно, чуть промахнулся, но на это у Шпенглера тоже есть объяснение".

Люди.

Конечно, Н.А. Вавилов был с рождения наделен выдающимися способностями, феноменальной памятью и еще тем, что я бы назвал "языковым чутьем". Но полностью реализовать эти "начальные данные" он смог только благодаря тем удивительным людям, которые встретились на его жизненном пути.

О двух таких людях Н.А. вспоминает в статье, посвященной гипотезе Гольдбаха.

Один из них – его учитель математики в 30-й школе, Иосиф Яковлевич Веребейчик. (От автора: мне очень приятно писать добрые слова об этом человеке, который учил математике и меня – и несомненно, то, что я стал профессиональным математиком – всецело его заслуга. – С.П.)

Цитирую Н.А.

"Эта статья – как и все остальные статьи этой серии – никогда не была бы написана, если бы два человека в 1967-1969 годах не изменили линию моей жизни.

Первым из них был Иосиф Яковлевич Веребейчик, который взял меня в свой класс, когда я перешел в 30-ю школу. Осенью 1967, когда мы пришли в 9-й класс, он прочел с нами "Основы анализа" Эдмунда Ландау: аксиомы Пеано, сечения Дедекинда, комплексные числа, вот это все с полными доказательствами, с проверкой всех корректностей, всех тождеств и т.д. Но весной 1968 после изучения пределов не продолжил по Ландау, а соскочил на "Основы современного анализа" Жана Дьедонне, правда, уже не так подробно, пропуская некоторые более сложные доказательства, и не целиком, без последних глав. Когда он рассказал нам канторовский диагональный процесс, я понял, что буду заниматься не естествознанием, а математикой".

Вторым был отец одного из школьных друзей Н.А. Николай Григорьевич Чудаков, математик, который получил "легендарный" (по оценке Н.А.) результат по четной гипотезе Гольдбаха и написал классическую книгу по L-функциям. Н.А. вспоминает, как Н.Г. с ним "беседовал", перечисляя темы "бесед": асимптотический закон распределения простых, теорема Дирихле, L-ряды, гипотеза Римана, гипотеза Артина, совершенные и дружественные числа, гипотеза Гольдбаха с вариациями, диофантовы уравнения ...

Темы, к которым Н.Г. постоянно возвращался в те годы – это трансцендентные числа, диофантовы приближения, линейные формы от логарифмов, проблема десятого дискриминанта, теоремы Лиувилля, Гельфонда, Шнайдера, Зигеля, Туэ, Рота, вплоть до почти современных тогда работ Старка, Шидловского и Фельдмана. Н.А. признает: "В результате эту часть теории чисел я определенно знал в 10-м классе школы лучше, чем сейчас, по крайней мере, на фактическом уровне".

Впрочем, обсуждалась не только теория чисел. Н.А.: "С такой же легкостью Н.Г. отвечал на мои вопросы, относившиеся к алгебре, алгебраической геометрии, топологии, анализу, логике ... Он всерьез изучал вещи типа теории схем, абелевых многообразий и т.д. и рассказывал мне про гипотезы Вейля и многое в таком духе. Но что меня тогда поразило больше всего, он прекрасно знал и, очевидно, читал с доказательствами вещи типа теоремы Сколема, теорем Геделя, работы Девиса, Робинсон, Матиясевича по решению 10-й проблемы Гильберта ...".

Н.А. заключает: "В принципе, сформировать математика из любого ребенка и даже подростка чрезвычайно легко. Нужно просто выдать ему такого учителя математики, как Иосиф Яковлевич, и живого профессора математики, который будет с ним разговаривать, такого как Николай Григорьевич. Ну, разговаривать-то мы все горазды, но где же взять столько школьных учителей?"

Признанным патриархом Ленинградской – Санкт-Петербургской алгебраической школы был Дмитрий Константинович Фаддеев (которого все называли просто Д.К.), "научный дед" Н.А. Вавилова. (Как и в случае И.Я. Веребейчика, я с удовольствием вспоминаю Д.К., который читал мне общий курс алгебры на 1-2 курсах, произнося при этом незабываемое слово "щислы", и поставил мне первую университетскую пятерку. – С.П.)

Дальше – две цитаты из текстов Н.А.

"Д.К. был одним из самых понимающих, квалифицированных, тщательных и добросовестных людей, которых я вообще видел в своей жизни, с невероятно развитой, для математика, способностью к ментальным вычислениям. Я был свидетелем того, как он умножал на доске две матрицы 8×8, одновременно записывая ответ двумя руками".

"Позволю себе одно замечание чуть в сторону, которое иллюстрирует класс этого человека. На конгрессе по научным вычислениям в Линце, узнав, что я представляю школу Фаддеева, Хенк ван дер Форст тут же заметил, что до сих пор в огромной части *практических* вычислений, связанных с задачами гидроаэродинамики, в которых приходится решать *большие* системы линейных уравнений – миллионы уравнений от миллионов неизвестных, – используются методы, предложенные Д.К. в начале 1960-х годов, и что он сам писал соответствующие алгоритмы для "Боинга" и НАСА. Я тут же подумал, насколько мы ленивы и нелюбопытны – в любом другом университете красочные плакаты об этом висели бы на всех стенах, а я, научный внук Д.К., впервые узнаю об этом от голландского коллеги. И ведь это далеко не центральный предмет размышлений Д.К., а лишь одна из побочных тем, которыми он интересовался".

Благодарности

Автор глубоко благодарен своим коллегам, которые проявили интерес к этому тексту и сделали полезные замечания: А.И. Буфетову, Е.В. Дыбковой, А.А. Ливеровскому, А.И. Назарову, С.И. Николенко, Е.Б. Плоткину, и В.Г. Халину.

Особая благодарность Г.М. Полотовскому и Г.И. Синкевич, оказавшим неоценимую помощь при окончательном редактировании текста.

Литература

1. Плоткин Е.Б., Генералов А.И., Гельдхаузер Н.С., Гордеев Н.Л., Лузгарев А.Ю., Нестеров В.В., Панин И.А., Петров В.А., Пилюгин С.Ю., Степанов А.В., Ставрова А.К., Халин В.Г. *О Николае Александровиче Вавилове* // Записки научных семинаров ПОМИ. 2024. т. 531. С. 7–40.

2. Plotkin E. *Nikolai Vavilov, mathematics and life* // European Journal of Mathematics. 2025. Vol. 11, article number 45.

3. Всемирнов М.А., Гордеев Н.Л., Канель-Белов А.Я., Панин И.А., Петров В.А., Пилюгин С.Ю., Платонов В.П., Плоткин Е.Б., Семенов А.Л., Смирнов С.К., Степанов А.В., Халин В.Г., *Николай Александрович Вавилов* // Успехи математических наук (в печати).

4. Вавилов Н.А.. *Компьютер как новая реальность математики. I. Personal account* // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. N. 2. С. 5–26.

5. Вавилов Н.А.. *Компьютер как новая реальность математики. II. Проблема Варинга* // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. N. 3. С. 5–55.

6. Вавилов Н.А.. *Компьютер как новая реальность математики. III. Числа Мерсенна и суммы делителей* // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. N. 4. С. 5–58.

7. Вавилов Н.А.. *Компьютер как новая реальность математики. IV. Проблема Гольдбаха* // Компьютерные инструменты в образовании. 2021. N. 4. C. 5–71.

8. Вавилов Н.А. *Компьютер как новая реальность математики. V. Легкая проблема Варинга* // Компьютерные инструменты в образовании. 2022. N. 3. C. 5–63.

9. Вавилов Н.А.. *Компьютер как новая реальность математики. VI. Числа Ферма и их родственники* // Компьютерные инструменты в образовании. 2022. No. 4. C. 5–67.

10. Вавилов Н.А., Халин В.Г., Юрков А.В. *Mathematica для нематематика: учебное пособие для вузов.* Электронное издание. М.: МЦНМО. 2021. 483 С.

11. Вавилов Н.А. *Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. I. Предыстория* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3. С. 381–405.

12. Вавилов Н.А. *Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. II. Ранние работы Суслина* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 48–83.

13. Вавилов Н.А., Мысовских В.И., Тетерин Ю.Г. *Вычислительная теория групп в С.-Петербурге* // Записки научных семинаров ПОМИ. 1997. т. 236. С. 42–49.

14. Вавилов Н.А. *Конкретная теория групп, Часть 1, 2.* Отпечатано в информационно-издательском отделе НИИММ им. В.И.Смирнова, 2003 г. Тираж 40 экз.

15. N. Vavilov *Reshaping the metaphor of proof* // Phil. Trans. R. Soc. A. 2019. **377**: 20180279.

16. Вавилов Н.А., Халин В.Г., Юрков А.В. *Небеса падают: математика для нематематиков* // Доклады Российской Академии Наук. Математика, Информатика, Процессы Упрвления. 2023. т. 511. С. 144–160.

Sergei Pilyugin
Saint Petersburg State University
14th line V.O., bd. 29
email: sergeipil47@mail.ru

Problems in model theory of algebraic groups

Eugene Plotkin

Abstract: The talk is focused on model theoretic questions of simple/reductive algebraic groups over arbitrary rings with emphasis on their elementary equivalence. We plan to survey the developments of the theory starting with last decade results on classical groups. The very recent results for the isotropic case obtained by P. Gvozdevsky and E.Voronetzky will be outlined. If time permits, I will address the issue of anisotropic groups, which is a hard and tempting goal for further research

Eugene Plotkin
Bar Ilan University,
Ramat Gan, Israel
e-mail: plotkin.evgeny@gmail.com

Cancellation Problems and Algebraic Groups

Vladimir L. Popov

Abstract. The purpose of this talk is to discuss some aspects of algebraic group theory that arise in connection with the cancellation problems in algebraic geometry, and the interaction between these topics.

Vladimir L. Popov
Steklov Mathematical Institute
Russian Academy of Sciences
Moscow, Russia
e-mail: `popovvl@mi-ras.ru`

Visualizing finite groups and algebras

George B. Shabat

Dessins d'enfants were introduced be Alexander Grothendieck in a rather non-traditional way, see [**Gro1984**]. The main objects of this theory are the graphs embedded in compact oriented surfaces in such a way that the complements are homeomorphic to disjoin unions of open disks. When the category of dessins d'enfants is neatly defined, it turns out to be equivalent to the arithmetic-geometric category of the so-called *Belyi pairs* and to certain categories of finite groups, see, e,g,. [**ShVo1990**] or [**Shab2016**].

After the brief general introduction some examples of the relations between dessins d'enfants and certain algebraic structures will be considered.

Following [**AKSS1995**] and [**Mati2016**], the visual images of the Mathieu groups M_{11} and M_{23} will be presented.

For a prime-power q the visualization of the finite field $\mathbb{F}_q$ by means of the complete graph with q vertexes will be discussed. More precisely, it will be explained that *every choice of a generator of the multiplicative group $\mathbb{F}_q^\times$ defines a highly symmetric dessin*; the field can be restored by this dessin [**Shab2025**].

The case of $\mathbb{F}_7$ will turn out to be closely related to the *octonions*.

References

[**AKSS1995**] N. M. Adrianov, Yu.Yu. Kochetkov, G. B. Shabat, A.D. Suvorov *Plane trees and Mathieu groups* . Fundam. Prikl. Mat 1, 377-384.

[**Gro1984**] Alexander Grothendieck, *Esquisse d'un Programme.* (1984 manuscript), finally published in "Geometric Galois Actions", L. Schneps, P. Lochak, eds., London Math. Soc. Lecture Notes 242, Cambridge University Press, 1997, pp. 5-48; English transl., ibid., pp. 243-283.

[**Mati2016**] Yu. Matiyasevich, *Calculation of Belyi functions for trees with weighted edges.* Proceedings of the POMI seminars, "Embedded graphs", 2016, pp. 122-138.

[**Shab2025**] G. Shabat, *Complete graphs and finite fields.* In preparation.

[**ShVo1990**] Shabat G.B., Voevodsky V.A. *Drawing Curves Over Number Fields*, In: Cartier P., Illusie L., Katz N.M., Laumon G., Manin Y.I., Ribet K.A. (eds) The Grothendieck Festschrift. Progress in Mathematics, vol 88(1990), Birkhäuser, Boston, MA.

[Shab2016] George B. Shabat, *Counting Belyi pairs over finite fields*, In 2016 MATRIX Annals (eds, David R. Wood, Jan de Gier, Cheryl E. Praeger, Terence Tao). MATRIX Book Series, Volume 1, p. 305-322, 2018.

George B. Shabat
State University for the Humanities
125047, Miusskaya ploschad', 6,
Moscow, Russia
e-mail: george.shabat@gmail.com

Jacobi inversion problem: classical and contemporary aspects

O.K.Sheinman

Abel transform sends divisors on a Riemann surface Σ into Abelian variety called Jacobian $Jac(\Sigma)$ of the surface. The inverse map is given by Riemann vanishing theorem which claims that the preimage of a generic point of the Jacobian can be found as the divisor of zeroes of a certain auxiliary function F on the Riemann surface, where F is constructed with help of the Riemann theta function of the surface. Together, Abel map and the Riemann theorem establish a birational equivalence between $Jac(\Sigma)$ and $\mathrm{Sym}^g\Sigma$ where $g = genus(\Sigma)$.

The problem of reversion of the Abel map is named after Jacobi. Jacobi's motivation can be judged with some degree of probability from his "Lectures on Dynamics". In the "Lectures" he expresses the idea that it is quite stupid to try to find out a change of variables solving a given differential equation. It is more smart to start with some simple dynamics, complicate it with help of some change of variables, and look for a problem which can be described by means of the obtained dynamics. Following that idea he takes uniform rectilinear motion and by means of a certain sophisticated transformation turns it into dynamics $\zeta = \zeta(t)$ satisfying the equation which reads as $A(\zeta) = c(t)$ in our contemporary language, where A is the Abel transform, ζ is a degree g divisor, $c(t) \in Jac(\Sigma)$ is a curve known in a sense it is expressed in terms of the original linear dynamics. The conclusion should be as follows: by reversion of the Abel map A we can find out the dynamics of divisors corresponding to our original linear dynamics.

It turned out to be that for a majority of known completely integrable systems, from classical systems to contemporary soliton equations, the Abel transform linearizes solutions, and the Jacobi inversion gives the dynamical divisor of the system. We will show it with the example of Hitchin systems.

The Riemann theorem reduces solution of the Jacobi problem to a trancendental equation containing theta functions. It is known (Buchstaber–Enolski–Leykin, 2012) that for hyperelliptic curves the problem is algebraic. However, in 1984 Dubrovin proposed an approach (again going back to Riemann) enabling to calculate some symmetric functions of the divisor of zeroes without resolving the equation itself. In particular, it enabled him to derive the celebrated Its-Matveev theta functional formula for solutions of the Korteveg-de Vries equation. Its and Matveev obtained it a bit earlier using similar ideas. In general, the symmetric functions computable by means of Dubrovin's approach do not give full invariants of the trajectory, however calculation of them reduces the Jacobi inversion problem to an algebraic one.

A wide class of finite-dimensional integrable systems is characterized by their spectral curves. These are finite genus algebraic curves over $\mathbb{C}$. It is remarkable that for those systems, the Separation of Variables method leads to an Abel-type map which transforms trajectories to the straight lines on some Abelian variety related to the spectral curve. The type of the map, and of the variety depends on the symmetry group of the integrable system. In physics, the symmetry group is usually referred to as the gauge group. If the gauge group is equal to $GL(n)$ then the above map is the Abel map itself. In the case of simple gauge groups the spectral curve of the system possesses a holomorphic involution coming from the Cartan involution on the group. In this case, the above mentioned map is the Abel–Prym map, and the corresponding Abelian variety is a certain finite unramified covering of the Prymian of the spectral curve.

Consideration of the case of a spectral curve with an involution was pioneered by Novikov and Veselov (1984), with relation to Schrödinger equation, and recently continued by the author, with relation to Hitchin systems. The Riemann vanishing theorem still holds in this case, but it is even less effective than in the classical case, becouse the divisor of zeroes is subject to an additional relation. The author managed to show that in presence of a second involution commuting with the first one the degree of efficiency is the same as in the classical case. It enabled us to integrate the Hitchin systems with gauge groups $SL(2)$ and $SO(4)$. It also implies birational equivalence between the Prymian of the first involution and a certain symmetric power of the quotient of the curve by the second involution.

Search for real solutions is a one more problem of the theory of integrable systems. This direction is related with works by Cherednik, Dubrovin and Natanzon, Veselov and Novikov. In the context of Jacobi inversion it is a problem of realness conditions for trajectories on the Abelian variety in question, which in turn reduces to study the symmenries of theta functions of real curves. The known results are due to Dubrovin and Natanzon for the Riemann theta function, and due to the author for the Prym theta function.

References

[1] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolski, D. V. Leykin. *Multi-Dimensional Sigma-Functions*, arXiv:1208.0990v1 [math-ph], 5 Aug 2012.

[2] P. I. Borisova, O. K. Sheinman. *Hitchin Systems on Hyperelliptic Curves*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2020, Vol. 311, pp. 22–35

[3] J.D.Fay. *Theta-functions on Riemann surfaces.* Lecture notes in mathematics, Vol. 352, Springer–Verlag, 1973.

[4] Dubrovin B.A. *Theta functions and non-linear equations.* Russian Mathematical Surveys, 1981, Vol. 36, Issue 2, P. 11–92

[5] Dubrovin B.A. *Riemann surfaces and non-linear equations.* Regular and Chaotic Dynamics, Izhevsk, 2001, 152 p.p. (in Russian).

[6] B. A. Dubrovin, S. M. Natanzon. *Real two-zone solutions of the sine-Gordon equation.* Funct. Anal. Appl., 16:1 (1982), p. 21–33.

[7] B. A. Dubrovin, *Matrix finite-gap operators.* J. Soviet Math., 28:1 (1985), 20–50.

[8] N.Hitchin. *Stable bundles and integrable systems.* Duke Math. J., Vol. 54, No. 1, 91-112 (1987).

[9] S.M.Natanzon. *Modules of Riemann surfaces, real algebraic curves, and their superanalogs.* MCCME, Moscow, 2003, 176 pp. (in Russian).

[10] S.M.Natanzon. *Prymians of real curves and their applications to the effectivization of Schrödinger operators.* Funct. Anal. Appl., 23:1 (1989), 33–45.

[11] S.M.Natanzon. *Real nonsingular finite zone solutions of soliton equations.* Topics in Topology and Mathematical Physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. p. 153–183. Amer. Math. Soc. Transl., Ser.2, V. 170.

[12] O.K.Sheinman. *Spectral curves of hyperelliptic Hitchin systems.* Funkt. Anal. App., Vol. 53 (2019), Num. 4, P. 291–303. arXiv:1806.10178 [math-ph].

[13] O.K.Sheinman, B.Wang. *Hitchin systems: some recent advances.* Russ. Math. Surv., 2024, Vol. 79, N 4, P.683–720.

[14] O.K.Sheinman. *Separation of variables for Hitchin systems with the structure group $SO(4)$, on genus two curves.* Proc.Steklov Inst., v, Vol. 325, P.292–303.

[15] O.K.Sheinman. *Inversion of the Abel–Prym map in presence of an additional involution.* Sbornik: Mathematics, 2025 (to appear)

[16] A.P.Veselov, S.P.Novikov. *Finite-gap 2-dimensional Shrödinger operators. Potential operators.* Doklady Math., Vol. 279 (1984), No. 4, P. 784–788.

O.K.Sheinman
Dept. of Geometry and Topology
Steklov Mathematical Institute
Moscow, RF
e-mail: `sheinman@mi-ras.ru`

Character bounds for simple groups and applications

Pham Huu Tiep

Given the current knowledge of complex representations of finite (quasi)simple groups, obtaining good upper bounds for their characters values still remains a difficult problem, a satisfactory solution of which would have significant implications in a number of applications. We will report on recent results that produce such character bounds, and discuss some such applications, including Thompson's conjecture $G = C^2$.

Pham Huu Tiep
Rutgers University
110 Frelinghuysen Road,
Piscataway, NJ 08854-8019, USA
e-mail: `tiep@math.rutgers.edu`

Mathematics for Non-Mathematicians: Memories of Professor Nikolai Vavilov

Николай Васильев, Людмила Вьюненко, Владимир Халин and Александр Юрков

Николай Александрович Вавилов стал инициатором и идеологом научного проекта, направленного, на создание отечественной системы компьютерной алгебры высокого уровня. Проект при жизни Николая Александровича активно продвигался заявками на конкурсы и был поддержан грантами Фонда Потанина (2018) и Правительства Санкт-Петербурга (2021). Заделами в образовательной составляющей проекта стали наработки для учебного курса "Математика и компьютер"(СПбГУ, 2005-2015), посвященного использованию системы Mathematica в преподавании основных разделов математики экономистам и другим нематематикам [**1**].

Дорожа памятью безвременно ушедшего лидера, соавторы проекта сочли необходимым продолжить его продвижение и исходить из формулировки научной проблемы, данной Николаем Александровичем. Вот как он обосновывал актуальность исследований для создания полноценной отечественной системы компьютерной алгебры.

Примерно 30 лет назад Дорон Зайльбергер констатировал, что компьютер становится для математики тем, чем телескоп и микроскоп стали для астрономии и биологии в XVII веке. При этом, говоря о роли компьютеров в математике, многие ограничиваются, с одной стороны, ролью численных вычислений в приложениях и, с другой стороны, системами формального вывода (автоматическая проверка теорем, верификация доказательств и т.д.). В этих направлениях, особенно в первом, в России имеются сложившиеся школы и серьезные достижения. Между тем, компьютерная математика к этому далеко не сводится. В частности, с нашей точки зрения, в ближайшем будущем гораздо большее значение как для самой математики, так и для ее приложений приобретут системы символьных вычислений и, в особенности, компьютерной алгебры. В частности, в последние годы выяснилось, что для многих реальных индустриальных проектов востребованы не прикладная математика и численные методы, а различные разделы фундаментальной математики и продвинутые компьютерные технологии. В этих направлениях также есть сильные исследовательские группы, в особенности в Дубне, Москве и Петербурге, они имеют большой опыт создания специализированных пакетов, заточенных под проведение специальных типов вычислений для конкретных приложений, обычно в самой математике, физике и астрономии, отчасти инженерных. Однако, функции, реализованные в этих пакетах, не охватывают сколь-нибудь широкие разделы математики, а сами пакеты не могут быть прямо использованы в математическом образовании. К тому же, в России среди самих математиков довольно широко распространено недоверие к возможностям систем символьных вычислений, принято указывать на "ошибки систем компьютерной алгебры" – с нашей точки зрения, абсолютно мнимые и связанные, с одной стороны, с непониманием основных принципов компьютерных вычислений, и, с другой стороны, с объективными трудностями интерпретации их результатов в традиционных математических терминах. Следует честно признать, что в этом отношении российская математика зримо отстает от мирового уровня. Если говорить не о специализированных пакетах, а о полноценных системах компьютерной алгебры общего назначения = general purpose CAS, то их совсем немного и в мире. Конечно, имеется огромное количество чрезвычайно гибких и мощных специализированных систем, таких как GAP, Magma, CoCoA, Singular, Pari, Lie и т.д., специально созданных для вычислений в конкретных областях таких как теория чисел, теория групп, теория представлений, коммутативная алгебра, алгебраическая геометрия и т.д. С другой стороны, имеется огромное количество элементарных систем, в том числе весьма интересных, используемых на элементарных этапах обучения математики, на уровне младшей и средней школы. Что практически отсутствует, это среднее звено, системы компьютерной алгебры, охватывающие широкий спектр различных разделов математики на средневысоком уровне. Если отбросить экспериментальные, совсем рудиментарные и заведомо устаревшие CAS, то сегодня таких современных систем совсем немного, фактически, четыре, Maple, Mathematica, Axiom и SageMath. При этом Axiom после смерти ее создателя Ричарда Джэнкса на протяжении долгого времени поддерживается только сообществом энтузиастов, а SageMath представляет собой фактически не независимую систему, а удобный фронтэнд, который предоставляет квалифицированному пользователю доступ к нескольким десяткам специализированных систем. Две из этих систем, Mathematica и Maple, являются коммерческими. Это совершенно замечательные, великие программные продукты, которые на момент своего создания в 1980-х годах представляли собой выдающееся достижение в компьютерной математике и стали де факто стандартом для организации таких систем. С другой стороны, некоторые принципиальные решения, касающиеся их общей архитектуры, организации вычислений, структур данных, и т.д., принятые в тот момент, в дальнейшем оказалось невозможно изменить, именно в связи с коммерческим характером систем и необходимостью обеспечить обратную совместимость (back compatibility). Кроме того, изменения в последних версиях этих систем все больше фокусируются не на аспектах, важных с точки зрения самой математики, а на различных чисто маркетинговых моментах: различных специфических экстра-математических приложениях, компьютерной графике и т.д. В отличие от системы Axiom обе эти системы не обладают простыми и естественными языковыми средствами для описания математических структур в терминах аксиом или свойств. Некоторые исключительно важные математические конструкции (символьные многочлены, символьные матрицы и т.д.) были включены в них только постфактум, с не самыми эффективными алгоритмами. Однако за последние 30–40 лет произошел огромный прогресс в понимании принципов компьютерной математики. В настоящее время стало идейно и технически возможно создать системы, язык которых по словарному составу и выразительной силе гораздо ближе к фактически используемому математиками (= human mathematicians) языку. Такой язык должен давать возможность описывать математические структуры так, как это фактически делается в математических книгах (с чуть более жестким синтаксисом). Это позволило бы, в частности, реализовать фронтэнд подобных систем на любом национальном языке. Кроме того, во многих случаях были предложены более эффективные алгоритмы и способы организации вычислений, которые позволяют проводить вычисления быстрее и с использованием меньшего ресурса. В частности, значительное развитие получили параллельные алгоритмы, которые не использовались в традиционных CAS. За последние десятилетия были гораздо лучше осознаны и, в значительной степени, преодолены и трудности перевода результатов символьных вычислений на язык традиционной математики. Это дает нам совершенно реальную надежду на возможность создания современной российской системы символьных вычислений с фронт-эндом на русском языке. Такая система могла бы быть вертикально интегрированной и, с одной стороны, по требованиям, предъявляемым к оборудованию и квалификации пользователя, доступной даже школьнику, а с другой стороны, позволять весьма изощренные математические приложения интересные профессиональным математикам. Как нам кажется, ни один из существующих CAS, при всех своих неоспоримых достоинствах, этим предельным условиям не удовлетворяет. Целью инициированных Н.А. Вавиловым исследований является разработка теоретических основ компьютерной математики для создания российской CAS высокого уровня, подготовка содержательных примеров для тестирования этой системы на математических задачах и разработка основ использования такой системы в математическом образовании. Кроме собственно научного интереса, создание системы стало бы важнейшим элементом стратегической безопасности научных исследований и имело бы огромное значение для математического образования на самых разных уровнях. Предпочтительно, такая система должна быть открытой (open-source), с четким разделением ядра, библиотек алгоритмов, поддерживающих разнообразные области современной чистой и прикладной математики, развитой системой типов данных, позволяющей на языковом уровне, конструировать объекты новых типов, используя языковые конструкции максимально приближенные к языку современной математики, а также различных интерфейсов с возможностью модификации частей кода квалифицированным пользователем. Предполагается создание front-end software, обеспечивающего поддержку облачных вычислений, параллелизацию алгоритмов, а также интерфейсы для взаимодействия с другими системами компьютерной алгебры, например, Mathematica, Maple, Wolfram Alpha и другие. Мы имели бы в виду доступность такой системы для использования на всех уровнях математического образования в России и, потенциально, в других странах, начиная со средних школ, и вплоть до обучения профессиональных математиков. В некотором смысле самым новым и наименее технологически разработанным здесь был бы именно средний уровень, т.е. обучение математике нематематиков: как инженеров, физиков, химиков, биологов, так и представителей экономических, общественных и гуманитарных дисциплин. Исторически математика была чрезвычайно успешной во многих приложениях, первоначально в астрономии и физике, потом в других областях естествознания и техники. Математика сегодня могла бы сыграть такую же роль во всех областях знания: биологии, медицине, науках о человеке, обществе, языке, мышлении и других. Если этого фактически пока не происходит, то только потому, что специалисты в этих областях травмированы текущей модальностью преподавания математики, начиная со школы, не знают ту математику, которая им нужна, и, что еще гораздо хуже, вообще не понимают, почему это знание им необходимо. Ясно, что создание удобной и доступной системы компьютерной алгебры, которой можно было бы перепоручить техническую сторону дела и целиком сосредоточиться на идейной стороне, могло бы в значительной степени снять эту проблему. Однако, одним из основных препятствий здесь является отсутствие опыта именно в создании, отладке и тестировании крупных систем такого типа. Российские программисты имеют огромный опыт и топовые достижения в разработки и реализации эффективных алгоритмов. Представляется, что пришло время взяться за подготовку содержательной базы такой системы - в первую очередь комплекса алгоритмов и математического контента - для создания полноценной российской CAS высокого уровня. Обстоятельства диктуют необходимость таких исследований. Обоснованность этих идей обсуждается в совместных с Н.А. Вавиловым работах авторов [**1**, **2**, **3**]. Основные идеи, которые, как мы надеемся, будут и дальше развиваться в рамках обозначенных Н.А. Вавиловым направлений исследований, сформулированы также в цикле статей [**4**].

Список литературы

[1] Вавилов Н.А., Халин В.Г., Юрков А.В. Mathematica для нематематика: учебное пособие для вузов Электронное издание М.: МЦНМО, 2021. 483 с. ISBN 978-5-4439-3584-3. https://www.mccme.ru/free-books/mathematica.pdf

[2] Vavilov N.A., Khalin V.G., Yurkov A.V. The skies are falling: Mathematics for non-mathematician.- Doklady Mathematics. 2023. Vol. 107, No 1, pp. 137-150. https://link.springer.com/article/10.1134/S1064562423700643 (in English)

[3] Вавилов Н.А., Халин В.Г., Юрков А.В. Небеса падают: математика для нематематиков Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 511. № 1. С. 144-160. https://journals.rcsi.science/2686-9543/article/view/142188 (на русском)

[4] Вавилов Н.А. КОМПЬЮТЕР КАК НОВАЯ РЕАЛЬНОСТЬ МАТЕМАТИКИ. I, II, III, IY – Компьютерные инструменты в образовании - 2020, № 2, 2021, № 3, 4
https://doi.org/10.32603/2071-2340-2020-2-5-26
https://doi.org/10.32603/2071-2340-2020-3-5-55
https://doi.org/10.32603/2071-2340-2020-4-5-58
https://doi.org/10.32603/2071-2340-2021-4-5-71

Николай Васильев
St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics
Fontanka, 27
Saint Petersburg, Russia
e-mail: vasiliev@pdmi.ras.ru

Людмила Вьюненко
Saint Petersburg State University of Industrial Tekhnologies and Design
191186, Bolshaya Morskaya street, 18
Saint Petersburg, Russia
e-mail: vyunenko@yandex.ru

Владимир Халин
Saint Petersburg State University of Industrial Tekhnologies and Design
191186, Bolshaya Morskaya street, 18
Saint Petersburg, Russia
e-mail: vhalin@yandex.ru

Александр Юрков
Saint Petersburg State University of Industrial Tekhnologies and Design
191186, Bolshaya Morskaya street, 18
Saint Petersburg, Russia
e-mail: ayurkov@yandex.ru

Locally isotropic elementary groups and their central extensions

Egor Voronetsky

The elementary subgroup of a general linear group over a ring is the largest perfect subgroup and it admits a nice generating set. This group and its prefect central extension called the Steinberg group play central role in the theory of linear groups over rings.

In this talk we discuss a generalization of these notions to the locally isotropic case, e.g. to the automorphism group of a finite projective module over a commutative ring.

Research is supported by the Russian Science Foundation grant 19-71-30002.

Egor Voronetsky
Chebyshev Laboratory
St. Petersburg State University, 14th Line V.O., 29
Saint Petersburg 199178 Russia
e-mail: `voronetckiiegor@yandex.ru`